Thème : Description d'un mouvement.
Cours 13 : Mouvement dans un champ de gravitation – Lois de Képler
(version professeur)

B.O. Mouvement dans un champ de gravitation.
Mouvement des satellites et des planètes. Orbite. Lois de Kepler. Période de révolution. Satellite géostationnaire.

Capacité numérique : Exploiter, à l'aide d'un langage de programmation, des données astronomiques ou satellitaires pour tester les deuxième et troisième lois de Kepler.

Vidéo introductive sur les lois de Képler : https://www.youtube.com/watch?v=J-LBcGJ8Icc 1 min 51 s

Première loi de Képler : les planètes décrivent une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Deuxième loi de Képler : le rayon Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

Troisième loi de Képler : le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi grand-axe de l'orbite.

Activités sur les lois de Képler

I. Comment démontrer que le mouvement d'un satellite est uniforme dans l'approximation d'un mouvement circulaire ?

Enoncé n° 1 : Antilles-Guyane septembre 2013 « De Hubble à James Webb »

Première partie : étude de l'orbite du télescope spatial Hubble
On étudie le système {télescope spatial Hubble} dans le référentiel géocentrique en négligeant l'interaction gravitationnelle du Soleil avec le télescope.
1.1. Quelle est la trajectoire du télescope Hubble dans ce référentiel ?
1.2. À partir de la deuxième loi de Newton, montrer que, dans l'approximation d'une trajectoire circulaire, le mouvement du télescope Hubble est uniforme.

Méthode n°1 : Utilisation de la deuxième loi de Newton.

Référentiel : géocentrique supposé galiléen.
Système : télescope de masse *m*.
Bilan des forces : Force gravitationnelle $\vec{F}$
direction radiale ; sens : centripète ; norme : $F = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{(R_T+h)^2}$
Application de la deuxième loi de Newton :
$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$
$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
$G \cdot \frac{m \cdot M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u} = m \cdot \vec{a}$ ($\vec{u}$: vecteur unitaire centripète)
$G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u} = \vec{a}$
Dans le repère de Frenet (O, $\vec{n}, \vec{\tau}$) :
$\vec{a} = \frac{v^2}{(R_T+h)} \cdot \vec{n} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}$
$G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u} = \frac{v^2}{(R_T+h)} \cdot \vec{n} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}$ avec $\vec{u} = \vec{n}$ (c'est-à-dire que l'accélération n'a pas de composante sur $\vec{\tau}$)
Alors $\frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} = \vec{0}$ donc la vitesse du satellite est constante.
Le mouvement du satellite est circulaire uniforme.

II. Vitesse et période d'un corps en mouvement circulaire uniforme.

***Enoncé n° 2 :** « Un trou noir au centre de la Galaxie»*

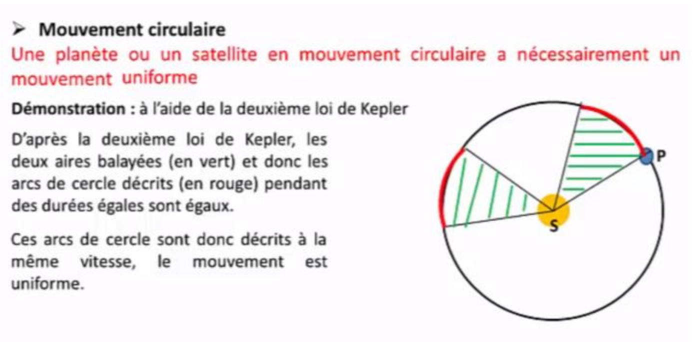
La traque du trou noir en infrarouge.
Certaines étoiles très proches du centre galactique sont suivies depuis plusieurs années par une équipe internationale.
La chance a voulu que d'une part l'une des étoiles surveillées - dénommée S2 - est passée au plus proche du centre de masse durant cette période et que, d'autre part, cette approche s'est faite à une distance remarquablement petite : seulement 17 heures-lumière.
Le fait que la trajectoire soit restée purement képlérienne a ainsi permis d'éliminer définitivement toute possibilité que la masse de quelques millions de masses solaires soit sous forme d'un amas dense stellaire sombre. En effet la taille de toutes ces structures est bien plus grande que les 17 heures-lumière de la distance d'approche. Seule reste la possibilité du trou noir très massif.

Estimation de la masse du trou noir.
Pour déterminer un ordre de grandeur de la masse M du trou noir, on considère dans cette question que l'étoile S2, de masse m, décrit une orbite circulaire de rayon r = 132 heures-lumière, la période de révolution étant T = 15,2 ans.
3.1. Montrer à l'aide de la deuxième loi de Képler que la vitesse de l'étoile est uniforme.
3.2. Montrer que la valeur v de la vitesse de l'étoile S2 a pour expression $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$

3.3 En déduire l'expression de la période de révolution T de l'étoile.

3.4 Déterminer la valeur de la masse M du trou noir et la comparer à celle annoncée dans le document 1.
Données : constante de gravitation universelle G = 6,67 × 10^{-11} u.S.I.

3.1. Utilisation de la deuxième loi de Képler.



3.2. $\vec{a} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$ dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme et $\vec{a} = G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{n}$

Ainsi on peut écrire $a_E = \frac{v_E^2}{r} = G \cdot \frac{M}{r^2}$ alors $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$

3.3. On a $v = \frac{2\pi r}{T}$ alors $T = \frac{2\pi r}{v}$

Avec l'expression $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ on en déduit que $T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}}$ soit $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$

3.4. Estimation de la masse du trou noir.
A partir de l'expression précédente on retrouve la troisième loi de Képler : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$

Alors $M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$ soit $M = \dfrac{4\pi^2 \times (132 \times 3600 \times 3{,}00 \times 10^8)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (15{,}2 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600)^2}$ = 7,45×10^{36} kg

III. Les satellites géostationnaires

Vidéo : Les conditions pour qu'un satellite soit géostationnaire https://www.youtube.com/watch?v=u60osLAaQR8

Conditions pour avoir un satellite géostationnaire

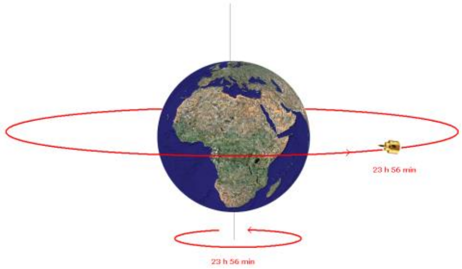
- Le satellite se déplace de manière synchrone avec la planète, c'est-à-dire que la période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la planète. Dans le cas de la Terre *T* = 84 164 s (souvent arrondi à 86 200 s)
- Le mouvement du satellite est supposé uniforme comme celui de la Terre.
- Le satellite doit tourner dans le même sens que celui de la Terre.
- Le plan de l'orbite est confondu avec le plan équatorial.

Question : A quelle altitude doit se situer un satellite afin d'être géostationnaire ?

La période de révolution étant égale à la période de rotation de la Terre autour de son axe, sa valeur est égal au jour sidéral, soit 23 h 56 min 4 s
T = 23,934 × 3 600 = 86164 s.

Le rayon orbital est égal à $R = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{86164^2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{4\pi^2}} = 42\,000$ km.

$h = R - R_T$ = 42 000 – 5 980 = **35 620 km.**



IV. Un intrus se cache dans la liste suivante. Lequel est-ce ?

Question : Trouver l'intrus !

Satellite de Jupiter	Période de révolution du satellite autour de Jupiter (s)	Distance du satellite à Jupiter (m)	$\frac{T^2}{a^3}$
Io	$1{,}53 \times 10^5$	$4{,}22 \times 10^8$	
Europe	$3{,}07 \times 10^5$	$6{,}71 \times 10^8$	
Ganymède	$6{,}19 \times 10^5$	$1{,}07 \times 10^9$	
Encelade	$1{,}18 \times 10^5$	$2{,}38 \times 10^8$	
Callisto	$1{,}44 \times 10^6$	$1{,}88 \times 10^9$	

Réponse :

Pour les satellites de Jupiter, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$est constant et égal à environ $3{,}12 \times 10^{-16}$ S.I.

Pour les satellites d'une autre planète, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est également constant mais sa valeur sera différente.

La valeur du rapport $\frac{T^2}{a^3}$est caractéristique de l'astre central autour duquel tourne les planètes ou satellites.

Satellite intrus (de Saturne)	Période de révolution du satellite	Distance du satellite à Jupiter (m)	$\frac{T^2}{a^3}$
Encelade	$1{,}18 \times 10^5$	$2{,}38 \times 10^8$	$1{,}03 \times 10^{-15}$

V. Comment déterminer avec un programme PYTHON, la masse de la planète de Jupiter à partir du mouvement de ses satellites ?

Questions :

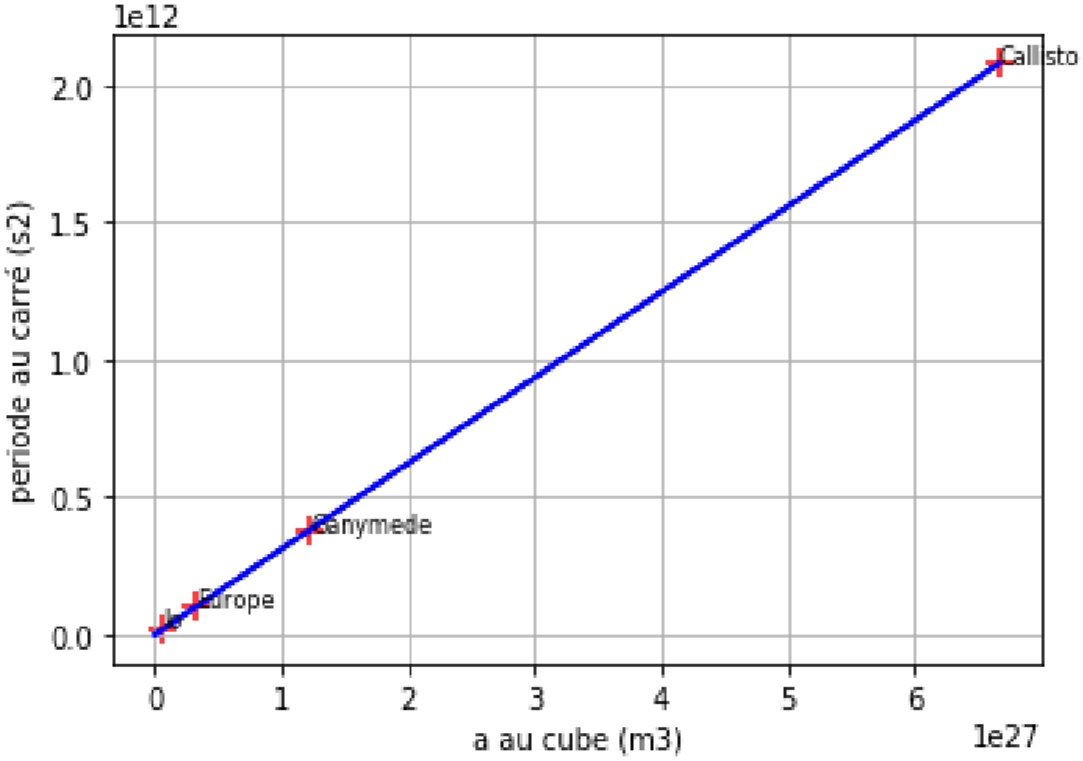
Compléter le programme PYTHON ci-dessous avec les données du tableau.
Tracer le graphique $T^2 = f(a^3)$
Déterminer la valeur du quotient $\frac{T^2}{a^3}$
En déduire la masse M_J de la planète Jupiter sachant que $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_J}$ $G = 6{,}67 \times 10^{11}\ m^3 \cdot kg^{-1} . s^{-2}$

	Io (I)	Europe (II)	Ganymède (III)	Callisto (IV)
Angle (°)	2,16	3,63	5,59	10,0
a ($\times 10^3$ km)	406	683	1070	1882
T (jour)	1,83	3,66	7,1	16,7

```
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as stat

# listes des demi-grands axes a en U.A et périodes des planètes en années

LIST_a = [406,683,1070,1882] #liste des demi-grands axes en km x 1 000
LIST_T = [1.83,3.66,7.1,16.7] # liste périodes de révolution des satellites
LIST_P = ['Io','Europe','Ganymede','Callisto'] # nom des satellites de Jupiter

# création des listes a au cube et T au carré
for i in range(0, len(LIST_a)):
  LIST_a[i] = (LIST_a[i]*1e6)**3 # a est converti en mètre puis élevée au cube
  LIST_T[i] = (LIST_T[i]*24*3600)**2 # T est converti en seconde puis élevé au carré

# régression linéaire
regression = stat.linregress(LIST_a,LIST_T) # regression est une liste des trois données : pente, ordonnée à l'origine et coefficient directeur
pente =regression[0] # récupération dans la variable pente du coefficient directeur
print('pente --> '+str(pente)) # Affichage du coefficient directeur
ordorigine =regression[1] #  récupération dans la variable ordorigine de l'ordonnée à l'origine
print('ordonnée à l origine --> '+str(ordorigine)) # Affichage de l'ordonnée à l'origine
coeffcorel = regression[2] #récupération dans la variable coeffcorel du coefficient de correlation r
print('coefficient de corrélation -->'+str(coeffcorel)) # Affichage du coefficient de correlation

#Calcul des coordonnées un points appartenant à la droite de régression
# ce point est utilisé pour tracer la droite sur le graphe
# la droite est tracé entre les points de coordonnées (0,0).et (a_3_max , T_2_max)
a_3_max = LIST_a[len(LIST_a)-1]
T_2_max =pente *a_3_max + ordorigine

#Affichage du graphe
plt.grid(True)
plt.xlabel("a au cube (m3)" )
plt.ylabel("periode au carré (s2)")
```

```
plt.scatter(LIST_a,LIST_T,s = 100,c ='red',marker ='+') # affichage des points

# Affichage des noms et de la droite de regression
for i in range (0,len(LIST_a)):
   plt.text(LIST_a[i],LIST_T[i], LIST_P[i],fontsize =8)
   plt.plot ([0,a_3_max],[ordorigine,T_2_max],c ='blue')
plt.show()
```

Graphique :



1. Détermination du rapport $\frac{T^2}{a^3}$

   A partir du programme : pente --> $\frac{T^2}{a^3}$ = 3.1219182814696752e-16 $s^2.m^{-3}$

   coefficient de corrélation -->0.999990156775687

2. $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_J}$

   $\Leftrightarrow M_J = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2}$

   $\Leftrightarrow M_J = \frac{4\pi^2 \cdot}{6,67\times10^{-11}\times3,12\times10^{-16}\cdot}$

   $\Leftrightarrow M_J = 1,897 \times 10^{27}$ kg

   La valeur théorique est égale à $M_J = 1,898 \times 10^{27}$ kg